ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. ožujka 2010.

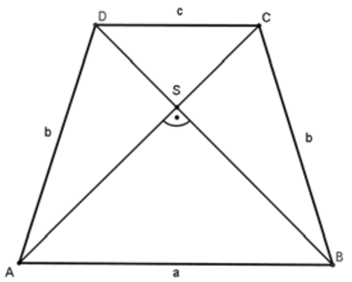
8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $10000 = 10^4 =$ 3 BODA
$= (2 \cdot 5)^4 =$ 3 BODA
$= 2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 625$ 4 BODA
……….…………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je x najmanji od 10 uzastopnih brojeva.
Tada je x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)+(x+8)+(x+9)-(x+y)=2009,
pri čemu je (x+y) izbrisani broj i $0 \le y \le 9$. 2 BODA
Sređivanjem slijedi 9x-y=1964 odnosno 9x=1964+y. 3 BODA
Kako je $9 \cdot 219 = 1964 + 7$, onda je x=219 i y=7. 3 BODA
Izbrisani broj je 219+7 odnosno 226. 2 BODA
…………………………………………..…………… UKUPNO 10 BODOVA

3. Kako je trapez jednakokračan, onda je $|AD| = |BC|$ i $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC|$. S obzirom da je stranica $\overline{AB}$ zajednička trokutima ΔABD i ΔABC, prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ABD \cong \Delta BAC$. To znači da je $|AC| = |BD|$ i $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BAC|$. Dakle, trokut ΔABS je jednakokračan pravokutan. 3 BODA



Zato možemo pisati $|AS| = |BS| = 17x$, $|CS| = |DS| = 7x, x \in \mathbb{R}^+$. Prema Pitagorinom poučku slijedi $a^2 = (17x)^2 + (17x)^2$ odnosno $a = 17x\sqrt{2}$ mm. Slično slijedi $c = 7x\sqrt{2}$ mm i $b = 13x\sqrt{2}$ mm. 3 BODA
Budući da je opseg trapeza $O = 50\sqrt{2}$, onda je $17x\sqrt{2} + 2 \cdot 13x\sqrt{2} + 7x\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$ odnosno $x = 1$. 2 BODA
Dalje je $|AC| = |BD| = 17x + 7x = 24x = 24$.
Dijagonale trapeza su duljine 24 mm. 2 BODA
…………………………………………..……………… UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je *C* mjesto u kojem je autobus susreo automobil, a *D* mjesto u kojem je automobil sustigao autobus. Tada je $|AC| = 10$ km i $|BD| = 20$ km. 1 BOD

Neka je $x = |CD|$. Put od *C* do *D* autobus je prešao za $\frac{x}{40}$ h. Za to vrijeme je automobil prešao put od *C* do *A* i put od *A* do *D* odnosno put duljine $(10 + 10 + x)$ km, a za to mu je trebalo ($\frac{x+20}{50} + \frac{1}{4}$) h. 3 BODA

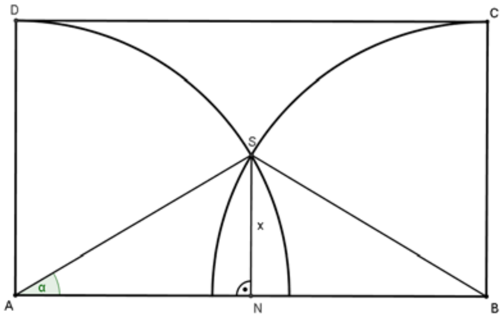
Zato vrijedi jednadžba $\frac{x+20}{50} + \frac{1}{4} = \frac{x}{40}$. 2 BODA

Rješavanjem jednadžbe slijedi $x = 130$. 2 BODA

Udaljenost mjesta *A* i mjesta *B* je 10+130+20 odnosno 160 km. 2 BODA

…………………………………………………….………… UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je a duljina ,a b visina prednjeg stakla autobusa. Tada je $a = 1.5\sqrt{3}, b = 1.5$. Budući da je $\sqrt{3} < 2$, onda je $a < 2b$. 1 BOD



Neka su oznake kao na slici

Kako je $|AS| = |BS| = b$, onda je ΔABS jednakokračan pa je $|\sphericalangle NBS| = |\sphericalangle SAN|$ i visina $\overline{SN}$ na osnovicu $\overline{AB}$ raspolavlja tu osnovicu, tj, $|AN| = |BN| = \frac{a}{2}$. 2 BODA

S obzirom da je ΔANS pravokutan, prema Pitagorinom poučku vrijedi $|AN|^2 + |NS|^2 = |AS|^2$ pa je $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 = b^2$ odnosno $\left(\frac{1.5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x^2 = 1.5^2$.

Slijedi $x = \frac{1.5}{2}$ odnosno $x = \frac{b}{2}$ što znači da je ΔANS polovica jednakostraničnog trokuta. Dakle, $\alpha = 30°$. 3 BODA

Neka je P_1 površina kružnog isječka u krugu polumjera $\overline{AS}$ sa središnjim kutom α, P_2 površina kružnog isječka u krugu polumjera $\overline{AD}$ sa središnjim kutom $\sphericalangle DAN$ i P površina stakla kojeg brišu brisači. Tada je $P = 2 \cdot P_2 - 2 \cdot (P_1 - P_{\Delta ANS})$.

Vrijedi $P_1 = \frac{b^2\pi\alpha}{360°} = \frac{2.25\pi}{12}$, $P_2 = \frac{b^2\pi 90°}{360°} = \frac{2.25\pi}{4}$, $P_{\Delta ANS} = \frac{|AN|\cdot|NS|}{2} = \frac{ab}{8} = \frac{2.25\sqrt{3}}{8}$ pa je $P = \frac{2.25\pi}{3} + \frac{2.25\sqrt{3}}{4}$. 2 BODA

Dalje je $\frac{P}{P_{ABCD}} = \frac{2.25\cdot\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{2.25\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{4} \approx 85\%$. Brisači brišu približno 85% površine stakla. 2 BODA

…………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA