ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve parove nenegativnih cijelih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju jednadžbu:

$$2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13.$$

Prvo rješenje.

Jednadžbu možemo zapisati u obliku $(2^a - 3) \cdot 3^b = 13 - 2^a$. (2 boda)

Budući da je $3^b > 0$, brojevi $2^a - 3$ i $13 - 2^a$ moraju biti istog predznaka, dakle $3 < 2^a < 13$. (2 boda)

To zadovoljavaju samo brojevi $a = 2$ i $a = 3$. (2 boda)

Za $a = 2$ imamo $1 \cdot 3^b = 9$, pa je $b = 2$. (2 boda)

Za $a = 3$ imamo $5 \cdot 3^b = 5$, pa je $b = 0$. (2 boda)

Dakle, jedina rješenja su parovi $(2, 2)$ i $(3, 0)$.

Drugo rješenje.

Izraz možemo zapisati u obliku $2^a \cdot 3^b - 3 \cdot 3^b + 2^a - 3 = 10$, odnosno

$$(2^a - 3)(3^b + 1) = 10. \qquad \text{(2 boda)}$$

Uočimo da je $3^b + 1 > 0$, pa je i $2^a - 3 > 0$.

Broj 10 se može na četiri načina prikazati kao umnožak dvaju prirodih brojeva, pa imamo četiri slučaja:

$10 = 1 \cdot 10$.

$2^a - 3 = 1,\ 3^b + 1 = 10 \ \Rightarrow\ 2^a = 4,\ 3^b = 9 \ \Rightarrow\ a = 2,\ b = 2$ (2 boda)

$10 = 2 \cdot 5$.

$2^a - 3 = 2,\ 3^b + 1 = 5 \ \Rightarrow\ 2^a = 5,\ 3^b = 4$ nema rješenja (2 boda)

$10 = 5 \cdot 2$.

$2^a - 3 = 5,\ 3^b + 1 = 2 \ \Rightarrow\ 2^a = 8,\ 3^b = 1 \ \Rightarrow\ a = 3,\ b = 0$ (2 boda)

$10 = 10 \cdot 1$.

$2^a - 3 = 10,\ 3^b + 1 = 1 \ \Rightarrow\ 2^a = 13,\ 3^b = 0$ nema rješenja (2 boda)

Dakle, jedina rješenja su parovi $(2, 2)$ i $(3, 0)$.

Napomena. Za napisana točna rješenja, bez postupka i dokaza da su jedina, treba dati po 1 bod za svako rješenje.

Zadatak A-1.2.

Prirodni broj n je umnožak četiri različita prosta broja p_1, p_2, p_3, p_4 manja od 250. Pritom za neka tri od njih vrijedi

$$p_1 p_2 p_3 = 3(p_1 + p_2 + p_3),$$

a broj $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ima sve znamenke iste. Odredi sve takve brojeve n.

Rješenje.

Uočimo najprije da je jedan od brojeva p_1, p_2, p_3 jednak 3. Neka je $p_1 = 3$. (1 bod)
(poredak faktora nije bitan)

Tada vrijedi $p_2 p_3 = p_2 + p_3 + 3$.

Ova jednadžba se može riješiti na razne načine. Ovdje ćemo navesti samo dva od njih.

Prvi način: Dobivena jednakost ekvivalentna je s $(p_2 - 1)(p_3 - 1) = 4$, (2 boda)

a jedini način da broj 4 prikažemo kao umnožak dvaju različitih prirodnih brojeva je $4 = 4 \cdot 1$. Zato je $p_2 = 2$ i $p_3 = 5$. (2 boda)

Drugi način: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $p_2 < p_3$.

Pretpostavimo još da je $p_2 > 2$. Tada je $p_3 > 3$ i vrijedi

$$p_2 p_3 = p_2 + p_3 + 3 < 3p_3 \leqslant p_2 p_3. \qquad \text{(2 boda)}$$

Kontradikcija. Zaključujemo da mora biti $p_2 = 2$ i sada se lako dobije $p_3 = 5$. (2 boda)

Nastavak.

Iz uvjeta da broj $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ima sve znamenke jednake, zaključujemo da je taj broj iz skupa

$$\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 111, 222\}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Prvi sljedeći broj bi bio 333, no zbog $p_1 + p_2 + p_3 = 10$ i $p_4 < 250$ to ne dolazi u obzir.

Kako je p_4 neparni prosti broj, iz ovog skupa možemo odmah izbaciti parne brojeve, pa je $p_4 + 10 \in \{11, 33, 55, 77, 99, 111\}$. (1 bod)

Direktnom provjerom, dobijemo $p_4 \in \{23, 67, 89, 101\}$. (2 boda)

Konačno, traženi brojevi su

$$n = p_1 p_2 p_3 p_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p_4 = 30 p_4 \in \{690, 2010, 2670, 3030\}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Napomena. Za rješenja napisana bez postupka i dokaza da su jedina, treba dati po 1 bod za svako točno rješenje i oduzeti po 1 bod za svako pogrešno rješenje.

Napomena. Prvi dio zadatka (određivanje brojeva p_1, p_2, p_3) može se riješiti i ovako:

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $p_1 < p_2 < p_3$.

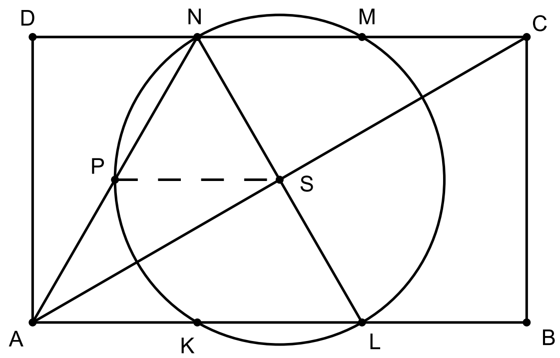
Tada je $3(p_1 + p_2 + p_3) < 9p_3$, pa slijedi $p_1 p_2 p_3 < 9p_3$, odnosno $p_1 p_2 < 9$. (3 boda)

Kako su p_1 i p_2 prosti i različiti, imamo samo jednu mogućnost:
$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, a onda je $p_3 = 5$. (2 boda)

Zadatak A-1.3.

Neka je $ABCD$ pravokutnik i k kružnica sa središtem u središtu pravokutnika. Kružnica k siječe stranicu $\overline{AB}$ u točkama K i L, a stranicu $\overline{CD}$ u točkama M i N, i pritom je $LN \perp AC$. Ako polovište dužine $\overline{AN}$ leži na kružnici k, koliki je omjer duljina stranica danog pravokutnika?

Rješenje.



Neka je S središte kružnice k i pravokutnika $ABCD$, te neka je P polovište dužine $\overline{AN}$. Neka je r polumjer kružnice k.

Jasno je da je $\overline{NL}$ promjer kružnice k. (Vidi napomenu.)

Kako je $LN \perp AC$, trokut ASN je pravokutan.

Dužina $\overline{PS}$ je težišnica tog trokuta pa vrijedi $|AP| = |PN| = |PS|$. (2 boda)

Iz $|PN| = |PS| = r = |NS|$ slijedi da je trokut NPS jednakostraničan. (1 bod)

Dužina $\overline{PS}$ je srednjica trokuta ALN (jer je $|AP| = |NP|$ i $|LS| = |SN|$)

pa je $|AL| = 2|PS| = 2r$ i trokut ANL je također jednakostraničan. (2 boda)

Trokut ADN je pravokutan, njegova hipotenuza $\overline{AN}$ je duljine $2r$ i $\sphericalangle NAD = 90° - \sphericalangle LAN = 30°$.

Stoga je $|DN| = \frac{1}{2}|AN| = r$ i $|DA| = |DN|\sqrt{3} = r\sqrt{3}$. (2 boda)

Četverokut $ALCN$ je romb (dijagonale su mu okomite i raspolavljaju se), pa je $|NC| = |AN| = 2r$. (2 boda)

Prema tome, $|DC| = |DN| + |NC| = r + 2r = 3r$.

Traženi omjer je $|AD| : |CD| = \dfrac{r\sqrt{3}}{3r} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (Odnosno $|AB| : |AD| = \sqrt{3}$.) (1 bod)

Napomena. Dokaz da je $\overline{NL}$ promjer kružnice k:

Neka su G i H polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Trokuti SGL i SHN su sukladni ($\sphericalangle SGL = \sphericalangle SHN = 90°$, $|SL| = |SN| = r$, $|SG| = |SH| = \frac{1}{2}|BC|$), pa je $\sphericalangle GSL = \sphericalangle HSN$. Zaključujemo da NL prolazi kroz S.

Ne zahtijeva se da učenici dokažu ovu i slične tvrdnje koje vrijede zbog simetrije!

Zadatak A-1.4.

Neka su a i b dva različita sedmeroznamenkasta broja od kojih svaki sadrži sve znamenke od 1 do 7. Dokaži da a nije djeljiv s b.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo suprotno, da postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ takav da je $a = n \cdot b$. (1 bod)

Primijetimo da svaki broj pri dijeljenju sa 9 daje isti ostatak kao i zbroj njegovih znamenki. (1 bod)

Dakle, brojevi a i b daju pri dijeljenju s 9 isti ostatak 1 (2 boda)
(suma njihovih znamenaka je $1 + 2 + \cdots + 7 = 28 = 3 \cdot 9 + 1$)

Međutim, ako b daje pri dijeljenju s 9 ostatak 1, tada $a = n \cdot b$ daje pri dijeljenju s 9 isti ostatak kao i n. (2 boda)

To znači da bi n trebao dati ostatak 1 pri dijeljenju s 9. (2 boda)

No, kako mora biti $1 < n < 10$, takvi a i b ne postoje. (2 boda)

Drugo rješenje.

Neka je $a = \overline{a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$ i $b = \overline{b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ takav da je $a = n \cdot b$. (1 bod)

Očito vrijedi $a \leqslant 7654321$, $b \geqslant 1234567$,

pa je $n \leqslant \dfrac{7654321}{1234567}$, (1 bod)

tj. $n \leqslant 6$. (1 bod)

Razmotrimo sve slučajeve:

$n = 2$. (1 bod)

Neka je k takav da je $b_k = 4$. Tada bi vrijedilo $a_k = 8$ (ako je $k = 1$ ili $b_{k-1} < 5$) ili $a_k = 9$ (za $b_{k-1} \geqslant 5$, jer se tada "prenosi" 1 iz množenja prethodne znamenke), što je nemoguće, budući da je $a_k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$.

$n = 3$. (1 bod)

Prvi način. Broj a nije djeljiv sa 3, jer mu zbroj znamenaka $1+2+3+4+5+6+7 = 28$ nije djeljiv s 3. Stoga n ne može biti 3.

Drugi način. U ovom slučaju iz prethodnog množenja prenosimo 0, 1 ili 2 $(3 \cdot 7 = 21)$. Neka je k takav da je $b_k = 6$. Tada bi, u ovisnosti o b_{k+1} (tj. ovisno o tome koliko prenosimo iz prethodnog množenja), a_k bilo 8, 9 ili 0, što je nemoguće.

$n = 4.$ (1 bod)

Neka je k takav da je $b_k = 7$. Iz prethodnog množenja prenosi se 0, 1 ili 2 (najveći rezultat je $6 \cdot 4 = 24$). Tada bi, u ovisnosti o b_{k+1}, a_k bilo 8, 9 ili 0, što je nemoguće.

(Netočno bi bilo tvrditi da se pri množenju broja sa znamenkama od 1 do 7 brojem 4 uvijek prenosi najviše 2. Npr. pri množenju $76 \cdot 4$, imamo najprije $6 \cdot 4 = 24$, pišemo 4, prenosi se 2; zatim računamo $7 \cdot 4 + 2 = 30$, pišemo 0 i prenosi se 3.)

$n = 5.$ (2 boda)

Prvi način. U ovom slučaju, rezultat množenja bilo koje znamenke brojem 5 završava znamenkom 0 ili 5, a prenosi se najviše 3, jer je $7 \cdot 5 = 35$, a čak i uz raniji prijenos $35 + 3 < 40$. Zbog toga nikako nije moguće dobiti znamenku 4, već samo $0, 0+1, 0+2, 0+3$ i $5, 5+1, 5+2, 5+3$.

Drugi način. Očito mora vrijediti $b_7 = 1$. Neka je k takav da je $b_k = 7$. U tom množenju se prenosi 3, pa je sljedeći rezultat $a_{k+1} = 3$ ili $a_{k+1} = 8$, ovisno da li je b_{k+1} paran ili neparan. Znamenke 8 nema, pa mora biti b_{k+1} paran i $a_{k+1} = 3$.
Neka je l takav da je $b_l = 6$. I ovdje se prenosi 3, pa istim zaključivanjem dobijemo $a_{l+1} = 3$, što je nemoguće (samo je jedna znamenka 3).

$n = 6.$ (2 boda)

Prvi način. Broj a nije djeljiv s 3 (pa onda ni sa 6), jer mu je zbroj znamenaka 28. Stoga njegov djelitelj n ne može biti jednak 6.

Drugi način. Kako je $b \geqslant 1234567$, vrijedi $a \geqslant 6 \cdot 1234567 = 7407402$. Najmanji broj sa znamenkama 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 koji to zadovoljava je broj 7412356. Dakle, $a \geqslant 7412356$.
Zato je $b \geqslant 7412356/6 > 1235392$. Najmaji broj sa znamenkama 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 koji to zadovoljava je broj 1235467. Dakle, $b \geqslant 1235467$.
Nastavljamo na isti način. Oba broja će se povećavati, malo po malo, dok ne dobijemo da bi broj a trebao biti veći od 7654321. Tada možemo zaključiti da takvi brojevi ne postoje. Potrebno je 28 puta ponoviti opisani postupak!

Dakle, ne postoji takav n.

Napomena. Svaki od ovih slučajeva može se riješiti na razne načine. Bez obzira na način rješavanja, učenik treba dobiti bodove predviđene za pojedini slučaj ako ga je u potpunosti riješio.

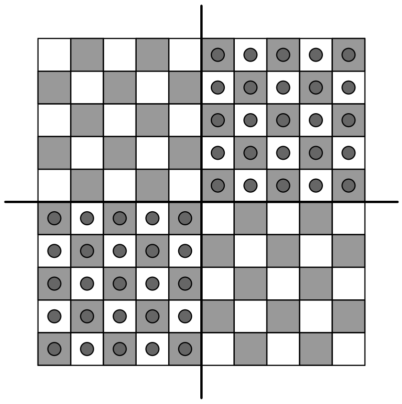
Zadatak A-1.5.

Na ploču 10×10 postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pritom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z, preskočivši žeton na polju Y.

Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovicu ploče?

Rješenje.

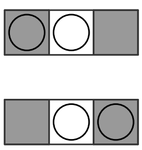
Obojimo polja ploče crnom i bijelom bojom kao na šahovskoj ploči (polje u donjem lijevom kutu je crno). (1 bod)



Tada 25 žetona u donjoj lijevoj četvrtini zauzima 12 bijelih i 13 crnih polja, a 25 žetona u gornjoj desnoj četvrtini također zauzima 12 bijelih i 13 crnih polja. (2 boda)

Primijetimo da žetoni svojim kretanjem uvijek prelaze sa crnog na crno, odnosno sa bijelog na bijelo polje, bez obzira kreću li se horizontalno, vertikalno ili dijagonalno. (2 boda)

Stoga se broj crnih (odnosno bijelih) polja koje žetoni zauzimaju ne mijenja. (2 boda)



Budući da žetoni u početku zauzimaju $12 + 12 = 24$ bijela i $13 + 13 = 26$ crnih polja, a donja polovica ploče se sastoji od 25 bijelih i 25 crnih polja, zaključujemo da je nemoguće postići da se svi žetoni nalaze na donjoj polovici ploče. (3 boda)