**ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE**

**2. razred – srednja škola – A varijanta**

**15. ožujka 2010.**

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**Zadatak A-2.1.**

Neka su $z_1$ i $z_2$ kompleksni brojevi takvi da vrijedi $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$.

Dokaži da je $|z_1 + \alpha z_2| = |\alpha z_1 + z_2|$ za svaki realni broj $\alpha$.

***Prvo rješenje.***

Neka je $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

Dani uvjet $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$ ekvivalentan je s:

$$|(a + bi) + 2(c + di)| = |2(a + bi) + (c + di)|,$$

$$|(a + 2c) + (b + 2d)i| = |(2a + c) + (2b + d)i|,$$

$$(a + 2c)^2 + (b + 2d)^2 = (2a + c)^2 + (2b + d)^2, \qquad \text{(2 boda)}$$

$$a^2 + 4ac + 4c^2 + b^2 + 4bd + 4d^2 = 4a^2 + 4ac + c^2 + 4b^2 + 4bd + d^2,$$

$$3c^2 + 3d^2 = 3a^2 + 3b^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2. \qquad \text{(3 boda)}$$

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Množenjem gornje jednakosti s $1 - \alpha^2$ dobivamo

$$(1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \alpha^2)b^2 = (1 - \alpha^2)c^2 + (1 - \alpha^2)d^2,$$

$$a^2 + \alpha^2 c^2 + b^2 + \alpha^2 d^2 = \alpha^2 a^2 + c^2 + \alpha^2 b^2 + d^2.$$

Sada na obje strane jednakosti dodamo $2\alpha ac + 2\alpha bd$ :

$$a^2 + 2\alpha ac + \alpha^2 c^2 + b^2 + 2\alpha bd + \alpha^2 d^2 = \alpha^2 a^2 + 2\alpha ac + c^2 + \alpha^2 b^2 + 2\alpha bd + d^2,$$

$$(a + \alpha c)^2 + (b + \alpha d)^2 = (\alpha a + c)^2 + (\alpha b + d)^2. \qquad \text{(4 boda)}$$

Konačno,

$$|(a + \alpha c) + (b + \alpha d)i| = |(\alpha a + c) + (\alpha b + d)i|,$$

$$|(a + bi) + \alpha(c + di)| = |\alpha(a + bi) + (c + di)|, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno $|z_1 + \alpha z_2| = |\alpha z_1 + z_2|$, što je i trebalo dokazati.

***Drugo rješenje.***

Za bilo koji realni broj $\alpha$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&|z_1 + \alpha z_2|^2 - |\alpha z_1 + z_2|^2 \\
&\qquad = (z_1 + \alpha z_2)(\overline{z_1 + \alpha z_2}) - (\alpha z_1 + z_2)(\overline{\alpha z_1 + z_2}) \\
&\qquad = (z_1 + \alpha z_2)(\overline{z_1} + \alpha \overline{z_2}) - (\alpha z_1 + z_2)(\alpha \overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&\qquad = |z_1|^2 + \alpha^2 |z_2|^2 + \alpha(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) - \alpha^2|z_1|^2 - |z_2|^2 - \alpha(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) \\
&\qquad = (1-\alpha^2)(|z_1|^2 - |z_2|^2).
\end{aligned}
$$
(5 bodova)

Kako je $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$, odnosno $|z_1 + 2z_2|^2 - |2z_1 + z_2|^2 = 0$,
i kako je (prema gornjoj formuli)

$$|z_1 + 2z_2|^2 - |2z_1 + z_2|^2 = (1 - 2^2)(|z_1|^2 - |z_2|^2),$$

vrijedi $|z_1|^2 - |z_2|^2 = 0$. (2 boda)

Zato je (opet prema gornjoj formuli) $|z_1 + \alpha z_2|^2 - |\alpha z_1 + z_2|^2 = 0$, za sve $\alpha \in \mathbb{R}$
odnosno $|z_1 + \alpha z_2| = |\alpha z_1 + z_2|$. (3 boda)

***Napomena.*** Ako učenik gornju formulu $|z_1 + \alpha z_2|^2 - |\alpha z_1 + z_2|^2 = (1-\alpha^2)(|z_1|^2 - |z_2|^2)$ izvede samo za $\alpha = 2$, za to treba dobiti 3 boda.

## Zadatak A-2.2.

Neka su $O$ i $P$ redom opseg i površina pravokutnika. Dokaži da vrijedi

$$O \geqslant \frac{24P}{O + P + 1}.$$

***Prvo rješenje.***

Ako duljine stranica pravokutnika označimo s $a$ i $b$, onda je $O = 2a + 2b$ i $P = ab$
pa je dana nejednakost ekvivalentna s $2(a+b)(2a+2b+ab+1) \geqslant 24ab$. (1 bod)

Iz A-G nejednakosti slijedi $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ i (2 boda)

$$a + a + b + b + ab + 1 \geqslant 6\sqrt[6]{a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot ab \cdot 1},$$

odnosno $2a + 2b + ab + 1 \geqslant 6\sqrt{ab}$. (6 bodova)

Stoga je

$$2(a+b)(2a+2b+ab+1) \geqslant 2 \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 6\sqrt{ab} = 24ab \qquad \text{(1 bod)}$$

Time je nejednakost dokazana.

***Drugo rješenje.***

Ako duljine stranica pravokutnika označimo s $a$ i $b$, onda je $O = 2a + 2b$ i $P = ab$ pa je dana nejednakost ekvivalentna s $2(a+b)(2a+2b+ab+1) \geqslant 24ab$. (1 bod)

Sređivanjem dobivamo $2(a+b)^2 + ab(a+b) + a + b \geqslant 12ab$,

odnosno $2a^2 + 2b^2 - 8ab + a^2b + ab^2 + a + b \geqslant 0$. (1 bod)

To možemo dalje transformirati na razne načine.

*Prvi način.*

$$2(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2b - 2ab + b) + (ab^2 - 2ab + a) \geqslant 0,$$

$$2(a-b)^2 + (a-1)^2\, b + a\,(b-1)^2 \geqslant 0. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Posljednja nejednakost očito vrijedi jer su $a$ i $b$ pozitivni brojevi, a kvadrati su uvijek nenegativni. (3 boda)

*Drugi način.*

$$2(a-b)^2 + ab^2 + a^2b + a + b - 4ab \geqslant 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

$$2(a-b)^2 + ab\big(b + a + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - 4\big) \geqslant 0.$$

$$2(a-b)^2 + ab\left(\big(a + \frac{1}{a} - 2\big) + \big(b + \frac{1}{b} - 2\big)\right) \geqslant 0. \qquad \text{(3 boda)}$$

Uočimo da je $x + \dfrac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$ za sve $x > 0$. (2 boda)

Stoga je $2(a-b)^2 \geqslant 0$, $ab > 0$, $a + \dfrac{1}{a} - 2 \geqslant 0$ i $b + \dfrac{1}{b} - 2 \geqslant 0$,
pa je nejednakost dokazana. (2 boda)

***Treće rješenje.***

Dana nejednakost ekvivalentna je s

$$O^2 + OP + O \geqslant 24P. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zbog A-G nejednakosti vrijedi $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ ($a$ i $b$ su duljine stranica pravokutnika).

Zato je $\dfrac{O}{2} \geqslant 2\sqrt{P}$, odnosno $O \geqslant 4\sqrt{P}$. (3 boda)

Odmah vidimo da je $O^2 \geqslant 16P$. $\quad (*)$ (1 bod)

Primjenom A-G nejednakosti dobijamo $OP + O \geqslant 2\sqrt{OP \cdot O}$, (2 boda)
pa je (zbog $O \geqslant 4\sqrt{P}$)

$$OP + O \geqslant 2\sqrt{OP \cdot O} = 2O\sqrt{P} \geqslant 2 \cdot 4\sqrt{P} \cdot \sqrt{P} = 8P. \qquad (**) \qquad \text{(2 boda)}$$

Konačno, zbrajanjem $(*)$ i $(**)$ dobivamo

$$O^2 + (OP + O) \geqslant 16P + 8P = 24P. \qquad \text{(1 bod)}$$

**Zadatak A-2.3.**

Odredi sve proste brojeve $p$ za koje je $2^p + p^2$ također prost broj.

***Rješenje.***

Za $p = 2$, $2^p + p^2 = 8$. (1 bod)

Za $p = 3$, $2^p + p^2 = 17$. (1 bod)

Za svaki neparni prosti broj $p$, broj $2^p$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. (3 boda)
$(2^p \equiv (3-1)^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3)$

Za svaki prosti $p > 3$, njegov kvadrat $p^2$ daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3. (3 boda)
$(p \equiv \pm 1 \pmod 3 \;\; \Rightarrow \;\; p^2 \equiv 1 \pmod 3)$

Dakle, za svaki prosti $p > 3$, broj $2^p + p^2$ je djeljiv s 3
$(2^p + p^2 \equiv 2 + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3)$

pa ne može biti prost. (1 bod)

Stoga je jedini prosti broj koji zadovoljava uvjet zadatka $p = 3$. (1 bod)

**Zadatak A-2.4.**

Točka $S$ je središte trokutu $ABC$ upisane kružnice, a simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki $D$. Dokaži da je $|AS| : |SD| = 2 : 1$ ako i samo ako vrijedi $|CA| + |AB| = 2|BC|$.

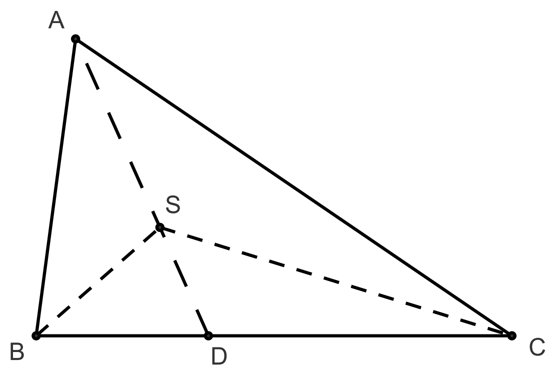
***Rješenje.***

Označimo s $a$, $b$, $c$ duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom.

U zadatku treba dokazati dvije tvrdnje:

**A.** Ako je $|AS| : |SD| = 2 : 1$, onda vrijedi $b + c = 2a$.

**B.** Ako je $b + c = 2a$, onda vrijedi $|AS| : |SD| = 2 : 1$.




***Prvo rješenje.***

Površinu trokuta $XYZ$ označavat ćemo $P(XYZ)$. Neka je $r$ polumjer upisane kružnice trokuta $ABC$. Uočimo da je udaljenost točke $S$ od svih stranica trokuta jednaka $r$.

*Dokaz tvrdnje* ***A***.

Neka je $|AS| : |SD| = 2 : 1$.

Trokuti $ASB$ i $DSB$ imaju jednake visine iz vrha $B$,
pa je $P(ASB) : P(BSD) = |AS| : |SD| = 2$, odnosno $P(ASB) = 2P(BSD)$.

Na isti način se pokaže $P(ASC) = 2P(CSD)$. (2 boda)

Zato vrijedi

$$P(ASC) + P(ASB) = 2(P(CSD) + P(BSD)) = 2P(BSC), \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = 2 \cdot \frac{a \cdot r}{2}$$

i konačno $b + c = 2a$. (2 boda)

*Dokaz tvrdnje **B**.*

Neka vrijedi $|CA|+|AB|=2|BC|$, tj. $b+c=2a$.

Tada vrijedi i $\dfrac{b\cdot r}{2}+\dfrac{c\cdot r}{2}=2\cdot\dfrac{a\cdot r}{2}$, odnosno

$$P(ASC)+P(ASB)=2P(BCS). \qquad \text{(1 bod)}$$

Toj jednakosti je ekvivalentno:

$$P(ASC)+P(ASB)=2(P(SDC)+P(SDB)),$$

$$\frac{1}{2}|AS|v_c+\frac{1}{2}|AS|v_b=2\left(\frac{1}{2}|DS|v_c+\frac{1}{2}|DS|v_b\right), \qquad \text{(2 boda)}$$

gdje smo s $v_b$, $v_c$ označili udaljenosti vrhova $B$, $C$ od pravca $AD$.

Dalje dobivamo

$$|AS|(v_b+v_c)=2|DS|(v_b+v_c), \qquad \text{(1 bod)}$$

i konačno $|AS|=2|SD|$, što je i trebalo dokazati. (1 bod)

***Drugo rješenje.***

U ovom rješenju koristimo teorem o simetrali kuta: Ako simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki $D$, onda je $|BD|:|DC|=|AB|:|AC|$.

Kako je pravac $CS$ simetrala kuta $\sphericalangle ACD$ u trokutu $ADC$, vrijedi
$|AS|:|SD|=|AC|:|CD|$. (1 bod)

Analogno, $BS$ je simetrala kuta $\sphericalangle ABD$ trokuta $ADB$, pa vrijedi
$|AS|:|SD|=|AB|:|BD|$. (1 bod)

*Dokaz tvrdnje **A**.*

Neka vrijedi $|AS|:|SD|=2:1$. Tada je $|AC|=2|CD|$ i $|AB|=2|BD|$. (2 boda)

Zbrajanjem dobivamo $|CA|+|AB|=2|BC|$. (2 boda)

*Dokaz tvrdnje **B**.*

Neka vrijedi $|CA|+|AB|=2|BC|$.

Relacije koje vrijede zbog teorema o simetrali kuta možemo zapisati u obliku

$$|CA|=\frac{|AS|\cdot|CD|}{|SD|} \quad \text{i} \quad |AB|=\frac{|AS|\cdot|BD|}{|SD|}.$$

Zbrajanjem dobivamo:

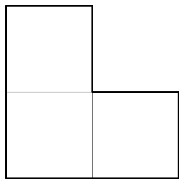
$$\begin{aligned}2|BC|=|CA|+|AB|&=\frac{|AS|\cdot|CD|}{|SD|}+\frac{|AS|\cdot|BD|}{|SD|} \qquad \text{(2 boda)}\\ &=\frac{|AS|}{|SD|}\big(|CD|+|BD|\big)=\frac{|AS|}{|SD|}\cdot|BC|,\end{aligned}$$

pa je $|AS|:|SD|=2:1$. (2 boda)

**Zadatak A-2.5.**

Kvadratna ploča podijeljena je na $5 \times 5$ jediničnih kvadrata (polja). Na nju postavljamo osam triomina, tako da samo jedno polje ploče ostane neprekriveno.

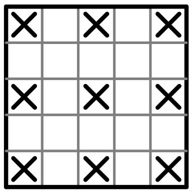
*Triomino* je lik sastavljen od tri jedinična kvadrata kao na slici:



Odredi koja sve polja dane kvadratne ploče mogu ostati neprekrivena pri takvom popločavanju.

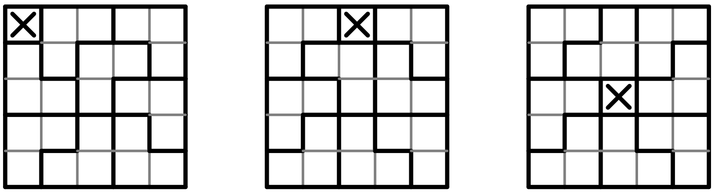
***Prvo rješenje.***

Neprekriveno može ostati jedno od 9 polja označenih na slici:



(1 bod)

Primjeri takvih prekrivanja dani su na sljedećim slikama



(3 boda)

Dokažimo da neprekriveno polje mora biti jedno od navedenih 9 polja.

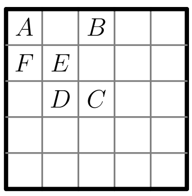
Svaki triomino postavljen na ploču prekriva najviše jedno od tih polja. No, polja ima 9, a triomina samo 8, pa će (po Dirichletovom principu) jedno od tih polja ostati neprekriveno.

(6 bodova)

***Drugo rješenje.***

Zbog simetrije ploče, možemo uočiti šest različitih tipova polja.

Označimo ih slovima $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ i $F$, kao na slici:




Polja tipa $A$, $B$ i $C$ prilikom prekrivanja danim triominima mogu ostati prazna.

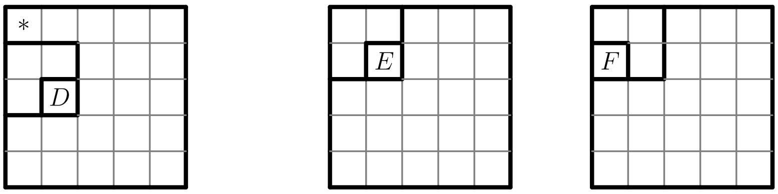
(1 bod)

Primjeri takvih prekrivanja su dani na slikama uz prvo rješenje. (3 boda)

Polja tipa $D$, $E$ i $F$ ne mogu ostati neprekrivena.

Kad bi polje tipa $D$ ostalo neprekriveno, jedan triomino morao bi biti postavljen u položaj na lijevoj slici (ili njemu simetričan).

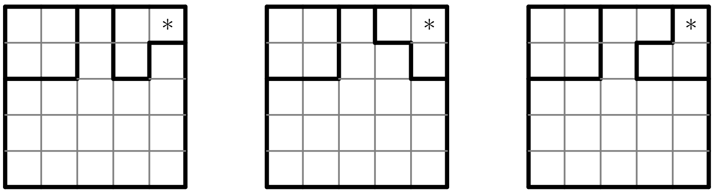
No, tada bi polje označeno zvjezdicom ($*$) bilo nemoguće prekriti. (1 bod)




Kad bi polje tipa $E$ ili $F$ ostalo neprekriveno, jedan triomino morao bi biti postavljen u položaj na slici (gore; sredina i desno). (1 bod)

U oba slučaja dalje nastavljamo na isti način.

Polje sa zvjezdicom može biti prekriveno jedino na sljedeća tri načina:

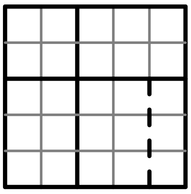



(1 bod)

U prvom slučaju prekrivanje očito nije moguće dovršiti,

a u drugom i trećem slučaju položaj još jednog triomina je određen. (1 bod)

U tim slučajevima, postavljanjem prva tri triomina prekrili smo 3 od 4 polja lijevog gornjeg kvadrata $2 \times 2$, i sva polja gornjeg desnog pravokutnika $2 \times 3$ na slici.



Sličnim zaključivanjem kao prije vidimo da dva triomina treba upotrijebiti da bismo prekrili donji lijevi pravokutnik $3 \times 2$. (1 bod)

No, istim zaključivanjem dolazimo do zaključka da dva triomina trebaju prekriti pravokutnik $3 \times 2$ u sredini dolje,

ali onda ostaje pravokutnik $3 \times 1$ koji je nemoguće prekriti triominom. (1 bod)