ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

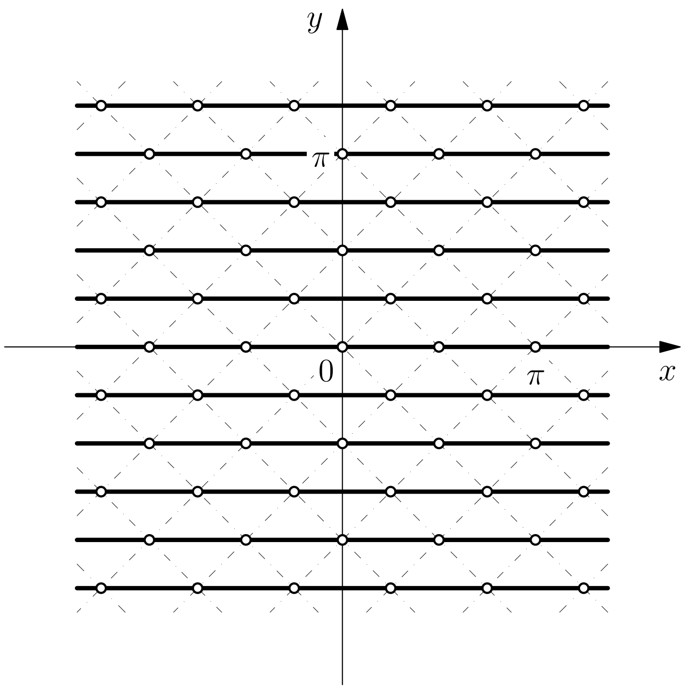
Zadatak A-3.1.

Riješi jednadžbu

$$\operatorname{tg}(x+y)+\operatorname{ctg}(x-y)=\operatorname{tg}(x-y)+\operatorname{ctg}(x+y)$$

i skiciraj u ravnini skup svih njenih rješenja.

Rješenje.



Skup svih rješenja je

$$\left\{\left(x, \frac{k\pi}{2}\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{l\pi}{2} \,\middle|\, l \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$$

$$\bigcup$$

$$\left\{\left(x, \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4}+\frac{l\pi}{2} \,\middle|\, l \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$$

Prvo rješenje.

Da bi $\operatorname{tg}(x+y)$ i $\operatorname{tg}(x-y)$ bili definirani, ne smije biti $x \pm y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ni za koji $k \in \mathbb{Z}$.

Da bi $\operatorname{ctg}(x+y)$ i $\operatorname{ctg}(x-y)$ bili definirani, ne smije biti $x \pm y = k\pi$ ni za koji $k \in \mathbb{Z}$.

Odavde je $x \pm y \neq \dfrac{k\pi}{2}$, za sve $k \in \mathbb{Z}$, odnosno $x \neq \pm y + \dfrac{k\pi}{2}$, za sve $k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

Zadanu jednadžbu možemo transformirati na sljedeći način:

$$\operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{ctg}(x-y) = \operatorname{tg}(x-y) + \operatorname{ctg}(x+y)$$

$$\operatorname{ctg}(x-y) - \operatorname{tg}(x-y) = \operatorname{ctg}(x+y) - \operatorname{tg}(x+y)$$

$$\frac{\cos(x-y)}{\sin(x-y)} - \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} - \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$\frac{\cos^2(x-y) - \sin^2(x-y)}{\sin(x-y)\cos(x-y)} = \frac{\cos^2(x+y) - \sin^2(x+y)}{\sin(x+y)\cos(x+y)} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\frac{\cos(2x-2y)}{\frac{1}{2}\sin(2x-2y)} = \frac{\cos(2x+2y)}{\frac{1}{2}\sin(2x+2y)} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\operatorname{ctg}(2x-2y) = \operatorname{ctg}(2x+2y) \qquad \text{(1 bod)}$$

Ovu jednadžbu lagano rješavamo:

$$2x + 2y = 2x - 2y + m\pi, \qquad \text{za } m \in \mathbb{Z},$$

odnosno $y = \dfrac{m\pi}{4}$, $m \in \mathbb{Z}$. (2 boda)

Uvjet koji smo odredili na početku prelazi u $x \neq \pm\dfrac{m\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$,

odnosno $x \neq (\pm m + 2k)\dfrac{\pi}{4}$, $m, k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

$\Big($Drugim riječima, za parno m, $x \neq \dfrac{l\pi}{2}$ $(l \in \mathbb{Z})$; a za neparno m, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{l\pi}{2}$ $(l \in \mathbb{Z})$.$\Big)$

Skup rješenja zadane jednadžbe prikazan je na slici. (2 boda)

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, ne smije biti $x \pm y = \dfrac{k\pi}{2}$ ni za koji $k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

Zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{ctg}(x-y) &= \operatorname{tg}(x-y) + \operatorname{ctg}(x+y)\\ \operatorname{tg}(x+y) + \frac{1}{\operatorname{tg}(x-y)} &= \operatorname{tg}(x-y) + \frac{1}{\operatorname{tg}(x+y)}\end{aligned}$$

Množeći s $\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y)$ dobivamo

$$\operatorname{tg}(x+y)(\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y)+1) = \operatorname{tg}(x-y)(\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y)+1) \qquad \text{(2 boda)}$$

Odavde slijedi

$$\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}(x-y) \qquad \text{ili} \qquad \operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y) = -1.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo $x+y = x-y+m\pi$, za $m \in \mathbb{Z}$, odnosno $y = \dfrac{m\pi}{2}$, za $m \in \mathbb{Z}$.

Zbog uvjeta mora biti $x \neq \pm\dfrac{m\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{2}$, tj. $x \neq \dfrac{l\pi}{2}$ za sve $l \in \mathbb{Z}$. (2 boda)

Druga jednadžba $\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y) = -1$, redom je ekvivalentna s

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x+y) &= -\operatorname{ctg}(x-y),\\ \operatorname{tg}(x+y) &= \operatorname{ctg}(y-x),\\ \operatorname{tg}(x+y) &= \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} - (y-x)).\end{aligned}$$

Sada slijedi $x+y = \dfrac{\pi}{2} - y + x + m\pi$, za neki $m \in \mathbb{Z}$ i konačno $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{m\pi}{2}$, za $m \in \mathbb{Z}$.

Zbog uvjeta vrijedi $x \neq \pm\dfrac{m\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, odnosno $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{l\pi}{2}$, za sve $l \in \mathbb{Z}$. (3 boda)

Rješenja zadane jednadžbe su sva rješenja prve i sva rješenja druge dobivene jednadžbe.

Skup rješenja zadane jednadžbe prikazan je na slici. (2 boda)

Napomena. Zadatak se može riješiti na mnogo načina. Pri bodovanju se treba držati ovih principa:

- određivanje uvjeta (kada su sve funkcije definirane): 1 bod
- transformacija jednadžbe i rješavanje dobivenih jednadžbi: ukupno 6 bodova

  (za transformaciju 2, 3, 4 boda, a za rješavanje jednadžbi preostalih 4, 3, 2 boda, ovisno o složenosti dobivenih jednadžbi - usporediti dana rješenja)
- uvažavanje uvjeta nakon rješavanja jednadžbi: 1 bod
- skica: 2 boda

Učenik koji uopće ne vodi računa o uvjetima može dobiti najviše 7 bodova
(6 bodova za transformaciju i rješavanje jednadžbi te 1 bod za skicu).

Zadatak A-3.2.

Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je $4 \cdot 3^{2m} + 5 = n^2$.

Prvo rješenje.

Uočimo da za $m < 0$ broj $4 \cdot 3^{2m}$ nije cijeli broj, dok $n^2 - 5$ jest, pa u ovom slučaju jednadžba nema rješenje. (2 boda)

Za $m = 0$ imamo $n^2 = 4 \cdot 1 + 5 = 9$, odakle slijedi $n = 3$ ili $n = -3$.

U ovom slučaju imamo dva rješenja: $(0, 3)$ i $(0, -3)$. (2 boda)

Za $m \geqslant 1$, broj $4 \cdot 3^{2m}$ je djeljiv s 3

pa broj $n^2 = 4 \cdot 3^{2m} + 5$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, (3 boda)

no to nije moguće, budući da kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 3 može dati samo ostatke 0 ili 1. Dakle, za $m \geqslant 1$ jednadžba nema rješenja. (3 boda)

Drugo rješenje.

Iz početne jednadžbe slijedi $n^2 - (2 \cdot 3^m)^2 = 5$, odnosno

$$(n - 2 \cdot 3^m)(n + 2 \cdot 3^m) = 5. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako su n^2 i 5 cijeli brojevi, da bi jednadžba bila zadovoljena i $4 \cdot 3^{2m}$ mora biti cijeli broj, a iz toga slijedi $m \geqslant 0$. (2 boda)

Stoga su $n - 2 \cdot 3^m$ i $n + 2 \cdot 3^m$ cijeli brojevi. (1 bod)

Nadalje, vrijedi $n - 2 \cdot 3^m < n + 2 \cdot 3^m$ pa stoga imamo samo dvije mogućnosti: (2 boda)

$$\begin{aligned} n - 2 \cdot 3^m &= 1 \\ n + 2 \cdot 3^m &= 5 \end{aligned}$$

čije je rješenje $n = 3$, $m = 0$ (2 boda)

i

$$\begin{aligned} n - 2 \cdot 3^m &= -5 \\ n + 2 \cdot 3^m &= -1 \end{aligned}$$

čije je rješenje $n = -3$, $m = 0$. (2 boda)

Napomena. Za točna rješenja bez postupka treba dati po 1 bod za svako rješenje.

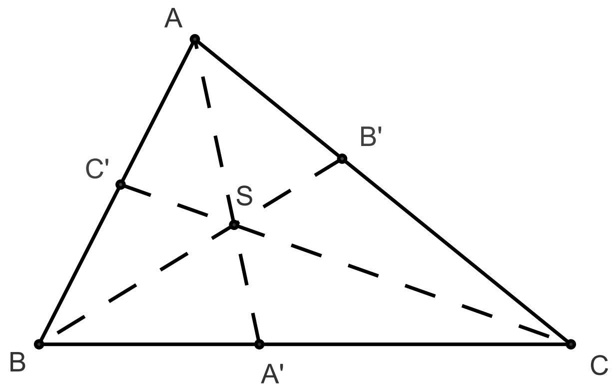
Zadatak A-3.3.

Neka su A', B', C' točke u kojima simetrale kutova trokuta ABC sijeku nasuprotne stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom i neka je S središte upisane kružnice trokuta ABC.

Ako je $|AS| : |SA'| = 3 : 2$, $|BS| : |SB'| = 4 : 3$ i ako je $|AB| = 12$, odredi duljine ostalih stranica trokuta.

Rješenje.

Neka su a, b i c redom duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$.



Koristeći teorem o simetrali kuta za trokut ABA' dobivamo

$|AB| : |A'B| = |AS| : |A'S| = 3 : 2$, a iz toga slijedi $|A'B| = \dfrac{2c}{3}$. (2 boda)

Slično, za trokut ABB' dobivamo $|AB| : |AB'| = |BS| : |B'S| = 4 : 3$,

a iz toga slijedi $|AB'| = \dfrac{3c}{4}$. (2 boda)

Za trokut ACA' dobivamo $|AC| : |A'C| = |AS| : |A'S| = 3 : 2$,

a iz toga slijedi $b : \left(a - \dfrac{2c}{3}\right) = 3 : 2$, odakle je $3a - 2c = 2b$. (2 boda)

Slično, za trokut BCB' imamo $|BC| : |B'C| = |BS| : |B'S| = 4 : 3$,

odakle je $a : \left(b - \dfrac{3c}{4}\right) = 4 : 3$, tj. $4b - 3c = 3a$. (2 boda)

Uvažavajući $c = 12$, rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} 3a - 2c &= 2b \\ 4b - 3c &= 3a \end{aligned}$$

dobivamo $a = 28$, $b = 30$. (2 boda)

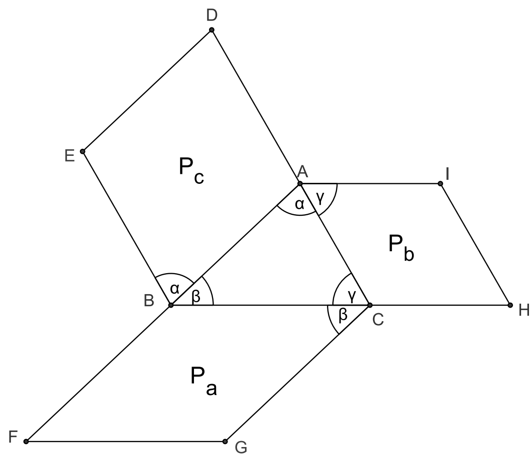
Zadatak A-3.4.

Nad stranicama trokuta ABC površine P nalaze se rombovi $ABED$, $BCGF$ i $CAIH$ tako da je $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BCG = \sphericalangle CBA$, $\sphericalangle CAI = \sphericalangle ACB$.

Dokaži da je zbroj površina triju rombova veći ili jednak $6P$.
Dokaži da se jednakost postiže ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan.

Prvo rješenje.

Označimo redom površine rombova $BCGF$, $CAIH$, $ABED$ s P_a, P_b, P_c, a kutove trokuta ABC s α, β, γ.



Tada je

$$P_a = a^2 \sin\beta, \qquad P_b = b^2 \sin\gamma, \qquad P_c = c^2 \sin\alpha. \qquad \text{(2 boda)}$$

Koristeći sinusov poučak $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, pri čemu je R polumjer kružnice opisane trokutu ABC, dobivamo

$$\begin{aligned} P_a + P_b + P_c &= a^2 \sin\beta + b^2 \sin\gamma + c^2 \sin\alpha \\ &= \frac{a^2 b}{2R} + \frac{b^2 c}{2R} + \frac{c^2 a}{2R} \qquad \text{(2 boda)} \\ &= \frac{1}{2R}(a^2 b + b^2 c + c^2 a) \end{aligned}$$

Iz A-G nejednakosti slijedi

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a \geqslant 3\sqrt[3]{a^2 b \cdot b^2 c \cdot c^2 a} = 3abc \qquad \text{(2 boda)}$$

a odatle slijedi tvrdnja

$$P_a + P_b + P_c = \frac{1}{2R}(a^2 b + b^2 c + c^2 a) \geqslant \frac{1}{2R} \cdot 3abc = \frac{3abc}{2R} = 6P. \qquad \text{(1 bod)}$$

Jednakost se u korištenoj A-G nejednakosti postiže ako i samo ako je $a^2 b = b^2 c = c^2 a$. (1 bod)

Ako je $a^2 b = b^2 c = c^2 a$, onda vrijedi $a^2 = bc$ i $ab = c^2$. Množenjem tih uvjeta dobivamo $a^3 b = bc^3$, odakle slijedi $a = c$, a onda lako zaključujemo $a = b = c$. (1 bod)

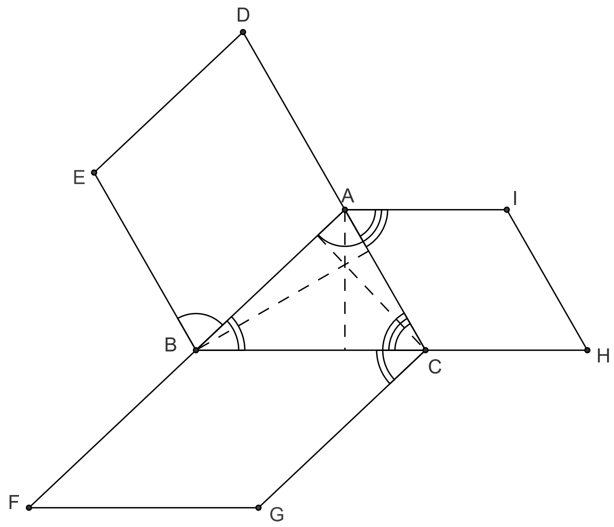
Obratno, ako je $a = b = c$, onda je $a^2 b = b^2 c = c^2 a$, pa je $P_a + P_b + P_c = 6P$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Označimo površine rombova s P_a, P_b, P_c kao u prvom rješenju.

Vrijedi $P_a = P(BCGF) = |BF| \cdot v_c$, gdje je v_c visina iz vrha C u trokutu ABC.

Osim toga, $|BF| = |BC| = a$, pa je $P_a = av_c$.



Na sličan način je $P_b = bv_a$, $P_c = cv_b$. (2 boda)

Koristeći $av_a = bv_b = cv_c = 2P$ dobivamo

$$\begin{aligned} P_a + P_b + P_c &= av_c + bv_a + cv_b \\ &= a \cdot \frac{2P}{c} + b \cdot \frac{2P}{a} + c \cdot \frac{2P}{b} \\ &= 2P\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz A-G nejednakosti slijedi:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}} = 3, \qquad \text{(2 boda)}$$

a odatle slijedi tvrdnja

$$P_a + P_b + P_c = 2P\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geqslant 2P \cdot 3 = 6P. \qquad \text{(1 bod)}$$

Jednakost se u korištenoj A-G nejednakosti postiže ako i samo ako je $\frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. (1 bod)

Odatle slijedi $a^2 = bc$ i $ab = c^2$, pa množenjem dobivamo $a^3b = bc^3$, odakle slijedi $a = c$, i dalje lako zaključujemo $a = b = c$. (1 bod)

Obratno, ako je $a = b = c$, onda je $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} = 3$, pa je

$$P_a + P_b + P_c = av_c + bv_a + cv_b = 2P\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) = 6P. \qquad \text{(1 bod)}$$

Napomena. Postoje mnogi načini da se nejednakost $P_a + P_b + P_c \geqslant 6P$ svede na nejednakost $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geqslant 3$ ili njoj ekvivalentnu $a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 3abc$. Npr.

$$\begin{aligned} P_a + P_b + P_c &= a^2 \sin\beta + b^2 \sin\gamma + c^2 \sin\alpha = \sin\alpha \left(a^2 \cdot \frac{b}{a} + b^2 \cdot \frac{c}{a} + c^2 \right) \\ &= bc \sin\alpha \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right) = 2P \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{P_a + P_b + P_c}{P} = \frac{P_a}{P} + \frac{P_b}{P} + \frac{P_c}{P} = \frac{a^2 \sin\beta}{\frac{1}{2}ac\sin\beta} + \frac{b^2 \sin\gamma}{\frac{1}{2}ab\sin\gamma} + \frac{c^2\sin\alpha}{\frac{1}{2}bc\sin\alpha} = 2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right)$$

Zadatak A-3.5.

Neka je n prirodni broj, $n > 1$. Kvadratići ploče $2n \times 2n$ obojani su plavom ili crvenom bojom tako da za svaka dva retka postoji točno n stupaca sa svojstvom da su dva kvadratića na presjeku tog stupca i promatranih dvaju redaka obojana istom bojom. Dokaži da broj n mora biti paran.

Rješenje.

Najprije uočimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je prvi redak cijeli obojan plavom bojom, jer ako na nekom mjestu nije plava boja, možemo u odgovarajućem stupcu zamijeniti boje.

Dodatno, možemo pretpostaviti da je prvih n mjesta u drugom retku obojano plavom bojom, a zadnjih n mjesta crvenom bojom. Naime, znamo da se na n mjesta boja prvog i drugog retka podudara, pa je n mjesta u drugom retku obojano plavom bojom. Ako to nije prvih n mjesta, onda permutiramo stupce. (3 boda)

Označimo s x broj plavih kvadratića među prvih n u trećem retku.

Da bi prvi i treći redak zadovoljavali uvjete zadatka, u trećem retku mora biti točno n plavih kvadratića, pa je od zadnjih n mjesta u trećem retku točno $n - x$ plavih, dok je preostalih x crveno. (3 boda)

Drugi i treći redak su obojani na $2x$ mjesta istom bojom, točnije, na x mjesta među prvih n (plavom bojom) i na x mjesta među zadnjih n (crvenom bojom). (3 boda)

Stoga je $n = 2x$, tj. n je paran. (1 bod)