ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

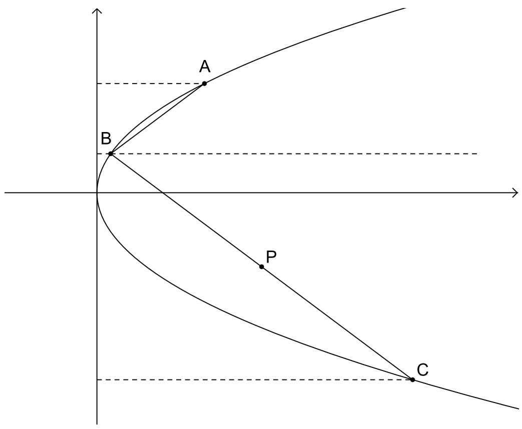
15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Dana je parabola $y^2 = 2px$, $p > 0$. Na paraboli su dane točke A, B i C (A ima najveću, a C najmanju ordinatu) tako da je simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ paralelna s x-osi. Ako je duljina projekcije dužine $\overline{AC}$ na y-os jednaka $4p$, odredi **ordinatu** polovišta dužine $\overline{BC}$.

Rješenje.



Označimo koordinate točaka A, B, C redom s $(\frac{y_A^2}{2p}, y_A)$, $(\frac{y_B^2}{2p}, y_B)$, $(\frac{y_C^2}{2p}, y_C)$. (1 bod)

Budući da pravci AB i BC zatvaraju sukladne kutove s x-osi, slijedi da su koeficijenti smjera tih pravaca suprotni. (2 boda)

Raspisivanjem uvjeta $k_{AB} = -k_{BC}$ dobivamo: $\dfrac{y_A - y_B}{\frac{y_A^2}{2p} - \frac{y_B^2}{2p}} = -\dfrac{y_B - y_C}{\frac{y_B^2}{2p} - \frac{y_C^2}{2p}}$,

odnosno $\dfrac{y_A - y_B}{y_A^2 - y_B^2} = -\dfrac{y_B - y_C}{y_B^2 - y_C^2}$. (2 boda)

Primjenom formule za razliku kvadrata dobivamo $y_A + y_B = -(y_B + y_C)$ pa vrijedi

$$y_A + 2y_B + y_C = 0. \qquad (*)$$ (1 bod)

Uvjet "duljina projekcije dužine $\overline{AC}$ na y-os iznosi $4p$", zbog $y_A > y_C$, može se zapisati u obliku

$$y_A - y_C = 4p. \qquad (**)$$ (1 bod)

Oduzimanjem $(**)$ od $(*)$ dobit ćemo $2y_B + 2y_C = -4p$. (2 boda)

Dakle, ordinata polovišta P dužine $\overline{BC}$ je $y_P = \dfrac{y_B + y_C}{2} = -p$. (1 bod)

Zadatak A-4.2.

Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Prvo rješenje.

Primjetimo da m ne može biti negativni cijeli broj jer tada lijeva strana jednadžbe ne bi bila cijeli broj. (1 bod)

Ako je $m = 0$ onda je $n = \pm 2$. (1 bod)

Neka je $m > 0$. Ako je (m, n) rješenje onda je i $(m, -n)$ rješenje pa ćemo najprije pronaći rješenja za koja je $n \geqslant 0$.

Danu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$(n-1)(n+1) = 3 \cdot 2^m. \qquad \text{(1 bod)}$$

Brojevi $n-1$ i $n+1$ su iste parnosti pa oba moraju biti parna.
Osim toga, kako je $n \geqslant 0$, oba moraju biti pozitivna.

Zato imamo dvije mogućnosti:

1. slučaj: $n - 1 = 2^k$, $n + 1 = 3 \cdot 2^l$, pri čemu je $k, l \geqslant 1$, $k + l = m$.

Imamo $2 = (n+1) - (n-1) = 3 \cdot 2^l - 2^k = 2 \cdot (3 \cdot 2^{l-1} - 2^{k-1})$.

Izraz u zagradi jednak je 1, dakle neparan, a to je moguće samo ako je $l = 1$ ili $k = 1$. (1 bod)

Ako je $l = 1$, slijedi $3 - 2^{k-1} = 1$, dakle $k = 2$ i dalje $m = 3$, $n = 5$. (1 bod)

Ako je $k = 1$, imamo $3 \cdot 2^{l-1} - 1 = 1$, a to je nemoguće. (1 bod)

2. slučaj: $n - 1 = 3 \cdot 2^k$, $n + 1 = 2^l$, pri čemu je $k, l \geqslant 1$, $k + l = m$.

Sada je $2 = (n+1) - (n-1) = 2^l - 3 \cdot 2^k = 2 \cdot (2^{l-1} - 3 \cdot 2^{k-1})$.

Izraz u zagradi jednak je 1, dakle neparan, a to je moguće samo ako je $l = 1$ ili $k = 1$. (1 bod)

Ako je $l = 1$, slijedi $1 - 3 \cdot 2^{k-1} = 1$, a to je nemoguće. (1 bod)

Ako je $k = 1$, slijedi $2^{l-1} - 3 = 1$, dakle $l = 3$ i dalje $m = 4$, $n = 7$. (1 bod)

Sva rješenja su $(m, n) \in \{(0, 2), (0, -2), (4, 7), (4, -7), (3, 5), (3, -5)\}$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Primjetimo da m ne može biti negativni cijeli broj jer tada lijeva strana jednadžbe ne bi bila cijeli broj. (1 bod)

Nadalje, ako je (m, n) rješenje onda je i $(m, -n)$ rješenje pa ćemo najprije pronaći rješenja za koja je $n \geqslant 0$.

Budući da lijeva strana nije djeljiva s 3 zaključujemo da n nije djeljiv s 3. (2 boda)

Razlikujemo dva slučaja.

1. slučaj: Neka je $n = 3k + 1$.

Tada je $2^m = k(3k + 2)$ te su k i $3k + 2$ potencije broja 2.

Ako je $k = 1$ onda nema rješenja (jer ne postoji m takav da je $2^m = 5$),
a ako je $k = 2$ dobivamo $n = 7$, $m = 4$. (1 bod)

Za $k > 2$ nema rješenja jer je $4k > 3k + 2 > 2k$ pa bi činjenica da je $k = 2^p$ potencija broja 2 bila u kontradikciji s činjenicom da je $3k + 1$ potencija broja 2, jer bismo imali $2^{p+2} > 3k + 1 > 2^{p+1}$. (2 boda)

2. slučaj: Neka je $n = 3k + 2$.

Tada je $2^m = (3k + 1)(k + 1)$ te su $k + 1$ i $3k + 1$ potencije broja 2.

Za $k = 0$ dobivamo $m = 0$ i tada je $n = 2$.
Za $k = 1$ dobivamo rješenje $m = 3$, $n = 5$. (1 bod)

Za $k > 1$ nema rješenja jer je $4(k+1) > 3k+1 > 2(k+1)$ pa bi činjenica da je $k+1 = 2^p$ potencija broja 2 bila u kontradikciji s činjenicom da je $3k+1$ potencija broja 2, jer bismo imali $2^{p+2} > 3k + 1 > 2^{p+1}$. (2 boda)

Sva rješenja su $(m, n) \in \{(0, 2), (0, -2), (4, 7), (4, -7), (3, 5), (3, -5)\}$. (1 bod)

Napomena: Nepostojanje rješenja za veće k može se pokazati i na sljedeći način:

1. slučaj: $M(3k + 2, k) = M(2, k)$, a to je 1 ili 2, pa mora biti $k = 1$ ili $k = 2$.

2. slučaj: $M(3k + 1, k + 1) = M(2k, k + 1) = M(k - 1, k + 1) = M(k + 1, 2)$, što iznosi 1 ili 2, pa mora biti $k + 1 = 1$ ili $k + 1 = 2$, odnosno $k = 0$ ili $k = 1$.

Zadatak A-4.3.

Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. U kružnicu je upisan n-terokut $A_1A_2\ldots A_n$. Dokaži da postoje tri vrha $A, B, C \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ za koje vrijedi

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \geqslant |A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + \ldots + |A_iA_{i+1}|^2 + \ldots + |A_nA_1|^2.$$

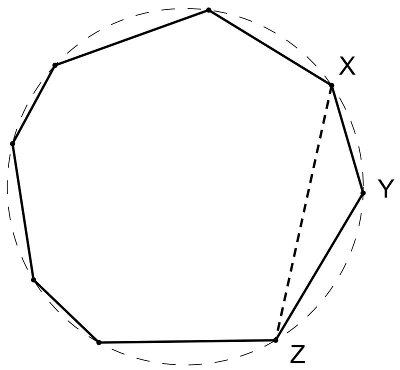
Rješenje.

Ako je $n = 3$ tvrdnja je trivijalna.

Neka je $n \geqslant 4$. Svaki konveksni n-terokut ima barem jedan unutrašnji kut koji nije manji od $90°$. (1 bod)

Naime, suma unutrašnjih kutova n-terokuta je $(n-2)\cdot 180°$ pa postoji barem jedan kut koji nije manji od $\frac{n-2}{n}\cdot 180° = (1-\frac{2}{n})\cdot 180° \geqslant (1-\frac{1}{2})\cdot 180° = 90°$. (2 boda)

Neka je to kut $\sphericalangle XYZ$. Tada možemo reducirati dani n-terokut na $(n-1)$-terokut spajanjem vrhova X i Z, tj. odbacivanjem trokuta XYZ. (1 bod)



Tvrdimo da suma kvadrata duljina stranica novonastalog $(n-1)$-terokuta nije manja od sume kvadrata duljina stranica polaznog n-terokuta. (1 bod)

Naime, budući da je kut pri vrhu Y pravi ili tupi, iz teorema o kosinusu dobivamo:

$$|XZ|^2 = |XY|^2 + |YZ|^2 - 2|XY||YZ|\underbrace{\cos(\sphericalangle XYZ)}_{\leqslant 0} \geqslant |XY|^2 + |YZ|^2. \qquad \text{(2 boda)}$$

Postupak nastavljamo na isti način s novonastalim mnogokutom, izbacujući svaki put po jedan vrh, sve dok ne dođemo do nekog trokuta ABC. Njegovi vrhovi A, B, C zadovoljavaju nejednakost iz zadatka. (3 boda)

Napomena. Uvjet da je n-terokut upisan u kružnicu nije nužan, dovoljno je npr. da promatrani n-terokut bude konveksan.

Zadatak A-4.4.

Neka su n i k prirodni brojevi te $S = \{1, 2, \dots, n\}$.

a) Odredi broj svih uređenih k-torki $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ pri čemu su $A_i, i = 1, \dots, k$ u parovima disjunktni podskupovi od S takvi da je $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$.

b) Odredi broj svih uređenih k-torki $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ pri čemu su $A_i, i = 1, \dots, k$ podskupovi (ne nužno disjunktni) od S takvi da je $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$.

Rješenje. **a)** dio zadatka vrijedi 3 boda, a **b)** dio 7 bodova

a) Svaki od elemenata skupa S nalazi se u jednom i samo jednom od skupova A_i, $i = 1, \dots, k$. (1 bod)

Dakle, podskup u kojem će se pojedini element nalaziti možemo odabrati na k načina. (1 bod)

Budući da skup S ima n elemenata, traženi broj je k^n. (1 bod)

b) *1. način*

Pridružimo svakom skupu A_i binarni niz duljine n koji na mjestu l ima 1 ako je $l \in A_i$ odnosno 0 ako $l \notin A_i$. (2 boda)

Formirajmo matricu $k \times n$ čiji su retci binarni nizovi pridruženi skupovima A_1, A_2,...,A_k. (1 bod)

Zbog uvjeta $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$ u svakom stupcu te matrice nalazi se barem jedna jedinica. (1 bod)

Obrnuto, svaka binarna matrica $k \times n$ u čijem se svakom stupcu nalazi barem jedna jedinica određuje jednu k-torku podskupova koja zadovoljava dani uvjet. (1 bod)

Takvih matrica ima $(2^k - 1)^n$, budući da svaki stupac možemo odabrati na $2^k - 1$ načina (sve osim $0\ 0\ 0\ \dots\ 0$). (2 boda)

b) *2. način*

Definirajmo skupove $T_1, \dots, T_n$ tako da se u T_i nalaze sve uređene k-torke $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ podskupova od $S \setminus \{i\}$ (bez ikakvih drugih uvjeta na uniju). (1 bod)

Traženi broj je broj elemenata skupa $T_1^c \cap T_2^c \cap \dots \cap T_n^c$. Izračunat ćemo ga po formuli uključivanja-isključivanja

$$|T_1^c \cap T_2^c \cap \ldots \cap T_n^c| = |T| - \sum_{i=1}^{n} |T_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |T_i \cap T_j| - \ldots + (-1)^n |T_1 \cap \ldots \cap T_n|,$$

pri čemu je T skup svih uređenih k-torki $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ podskupova od S, bez ikakvih dodatnih uvjeta. (1 bod)

Jasno je da je $|T| = (2^n)^k$ jer biramo k podskupova n-članog skupa.

Skup $S \setminus \{i\}$ sadrži $n-1$ članova, pa je $|T_i| = (2^{n-1})^k$ za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Skup $S \setminus \{i, j\}$ sadrži $n-2$ članova, pa je $|T_i \cap T_j| = (2^{n-2})^k$, itd. (3 boda)

Uvrstimo li ovo sve u formulu, koristeći binomni poučak dobivamo da je traženi broj

$$\begin{aligned}
|T_1^c \cap T_2^c \cap \ldots \cap T_n^c| &= 2^{kn} - \sum_{i=1}^{n} 2^{k(n-1)} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2^{k(n-2)} - \ldots + (-1)^n 2^0 \\
&= 2^{kn} - n \cdot 2^{k(n-1)} + \binom{n}{2} 2^{k(n-2)} - \ldots + (-1)^n 2^0 \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^{n-r} (2^k)^r = (2^k - 1)^n.
\end{aligned}$$

(2 boda)

Zadatak A-4.5.

Dokaži da je $\displaystyle\sum_{k=0}^{1005} (-3)^k \binom{2010}{2k} = 2^{2010}$.

Prvo rješenje.

Razvijemo li izraz $(1 + i\sqrt{3})^{2010}$ po binomnom poučku dobivamo

$$(1 + i\sqrt{3})^{2010} = \sum_{k=0}^{2010} (i\sqrt{3})^k \binom{2010}{k}.$$

(3 boda)

Sumu možemo rastaviti po parnim i neparnim indeksima:

$$(1 + i\sqrt{3})^{2010} = \sum_{k=0}^{1005} (-3)^k \binom{2010}{2k} + i\sqrt{3} \sum_{k=0}^{1004} (-3)^k \binom{2010}{2k+1}.$$

Odavde vidimo da je tražena suma zapravo realni dio broja $z = (1 + i\sqrt{3})^{2010}$. (2 boda)

Budući da je $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, (2 boda)

slijedi

$$z = 2^{2010}(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})^{2010} = 2^{2010} \underbrace{\left(\cos\tfrac{2010\pi}{3} + i\sin\tfrac{2010\pi}{3}\right)}_{=1+i\cdot 0} = 2^{2010}.$$

(2 boda)

Dakle z je realni broj, a njegov realni dio (tj. tražena suma) je upravo 2^{2010}. (1 bod)

Drugo rješenje.

Razvijemo li izraze $(1+i\sqrt{3})^{2010}$ i $(1-i\sqrt{3})^{2010}$ po binomnom poučku dobivamo

$$(1-i\sqrt{3})^{2010}=\sum_{k=0}^{2010}(-i\sqrt{3})^k\binom{2010}{k}.$$

$$(1+i\sqrt{3})^{2010}=\sum_{k=0}^{2010}(i\sqrt{3})^k\binom{2010}{k}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Zbrajanjem tih dviju jednakosti pribrojnici s neparnim indeksom u sumi se poništavaju i dobivamo

$$(1-i\sqrt{3})^{2010}+(1+i\sqrt{3})^{2010}=2\sum_{k=0}^{1005}(-3)^k\binom{2010}{2k}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Tražena suma iznosi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{1005}(-3)^k\binom{2010}{2k} &= \frac{1}{2}\left[(1-i\sqrt{3})^{2010}+(1+i\sqrt{3})^{2010}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[2^{2010}\left(\cos\tfrac{-\pi}{3}+i\sin\tfrac{-\pi}{3}\right)^{2010}+2^{2010}\left(\cos\tfrac{\pi}{3}+i\sin\tfrac{\pi}{3}\right)^{2010}\right] && \text{(2 boda)}\\
&= \frac{1}{2}\left[2^{2010}\left(\cos\tfrac{-2010\pi}{3}+i\sin\tfrac{-2010\pi}{3}\right)+2^{2010}\left(\cos\tfrac{2010\pi}{3}+i\sin\tfrac{2010\pi}{3}\right)\right] && \text{(2 boda)}\\
&= \frac{1}{2}\left[2^{2010}(1+i\cdot 0)+2^{2010}(1+i\cdot 0)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(2^{2010}+2^{2010}\right)=2^{2010}. && \text{(1 bod)}
\end{aligned}$$